Gruppo degli automorfismi di un gruppo

Possiamo considerare l'insieme degli automorfismi di un gruppo come dotato a sua volta di una struttura di gruppo. Dato il gruppo $(G,*)$, si considera l'insieme $\mathrm{Aut}(G)$ con l'operazione di composizione di applicazioni. Questa è ivi ben definita, in quanto la composta di due automorfismi di G è ancora un automorfismo di G. Inoltre essa dà luogo ad una struttura di gruppo poiché:

- è associativa;
- è dotata di elemento neutro, dato dall'automorfismo identico;
- rispetto ad essa, il simmetrico di ogni automorfismo è la sua applicazione inversa, che è a sua volta un automorfismo.

Tra gli automorfismi del gruppo G si distinguono i cosiddetti ***automorfismi interni***: per ogni $g \in G$, si considera l'applicazione

$$\begin{aligned} \varphi_g &: G \to G \\ & x \mapsto g * x * \overline{g} \end{aligned}$$

Si prova facilmente che:

- tale applicazione è un automorfismo di G, avente come automorfismo inverso $\varphi_{\overline{g}}$;
- l'insieme degli automorfismi interni di G è un sottogruppo di $\mathrm{Aut}(G)$, spesso indicato con $\mathrm{Inn}(G)$ (dall'espressione inglese *inner automorphism*).

Prima di procedere, osserviamo che, per ogni $g \in G$, l'applicazione φ_g è l'automorfismo identico se e solo se per ogni $x \in G$,

$$\varphi_g(x) = x$$

che equivale a

$$g * x * \overline{g} = x$$

ed a

$$g * x = x * g.$$

Quindi φ_g è l'automorfismo identico se e solo se $g \in Z(G)$. Ne consegue che:

- $\mathrm{Inn}(G)$ è il gruppo banale se e solo se G è abeliano.